

Statistische Modelle und Verfahren zur Beschreibung, Erfassung und Nutzung des Zusammenhanges zwischen einem indirekten Schnellprüfverfahren und einem direkten Prüfverfahren

FA 9.095

Forschungsstelle: Dr. Deutler, Lampertsheim
 Bearbeiter: Deutler, T.
 Auftraggeber: Bundesministerium für Verkehr, Bonn
 Abschluss: Januar 2000

1. Aufgabenstellung

Wenn anstelle eines direkten Prüfverfahrens ein alternatives indirektes Prüfverfahren zum Einsatz kommen soll, benötigt man die Kenntnis der sog. „Kalibrierfunktion“, anhand derer man Prüfmerkmalwerte und Anforderungen vom direkten auf das indirekte Prüfmerkmal übertragen kann. Diese Funktion ist empirisch anhand von geeignet geplanten und durchgeführten Kalibrierversuchen mit den beiden Verfahren zu ermitteln. Dazu sind prinzipiell folgende drei Aufgaben zu lösen:

Aufgabe 1: Statistische Bestimmung der Kalibrierlinie zwischen direktem und indirektem Prüfverfahren,

Aufgabe 2: Technische und statistisch praktikable Übertragung bestehender technischer Anforderungen vom direkten auf das indirekte Prüfverfahren,

Aufgabe 3: Konstruktion eines Prüfplans für das indirekte Prüfmerkmal, der technisch und statistisch adäquat an den vorgegebenen Prüfplan für das indirekte Verfahren adaptiert ist.

Die Lösung dieser drei, im Wesentlichen statistischen Problemstellungen, war das Ziel des vorliegenden Forschungsvorhabens.

Der vorgelegte Forschungsbericht besteht aus zwei Hauptteilen und zwar aus Teil I (siehe Abschnitte 1 bis 6) mit der Lösung zu Aufgabe 1 und aus Teil II (siehe Abschnitte 7 bis 10) mit der Lösung zu den Aufgaben 2 und 3.

2. Untersuchungsmethodik und Ergebnisse

TEIL I: Bestimmung von Kalibrierfunktionen in einem Kalibrierversuch

1 – Einführung

Im einführenden Abschnitt 1 wird theoretisch und an einem Beispiel plausibel gemacht, weshalb die bekannte und vielfach verwendete Methode der kleinsten Quadrate zur Ermittlung einer Kalibrierlinie aus den Daten eines Kalibrierversuches nicht geeignet ist. Denn eine mit dieser Methode bestimmte Kalibriergerade weist einen systematischen Steigungsfehler auf. Dieser ist darauf zurückzuführen, dass bei der Methode stillschweigend, aber unrealistischerweise prüffehlerfreie Messungen für das direkte Prüfverfahren unterstellt werden.

2 – Prüfverfahren und Prüffehler

In Abschnitt 2 werden zunächst die zur Beschreibung der Eigenschaften von Prüfverfahren und Prüfergebnissen erforderlichen Begriffe bereitgestellt. Die zugehörigen statistischen Eigenschaften und die üblicherweise (z.B. auch bei Ringversuchen) getroffenen Voraussetzungen werden dargelegt sowie in ihrer technischen und statistischen Bedeutung erläutert.

3 – Das Fehler-in den Variablen-Modell (FV-Modell)

Anders als bei der Kleinste-Quadrate-Methode werden beim FV-Modell die Prüffehler beider Prüfverfahren berücksichtigt. Das Modell besteht aus der Modellgleichung und den beiden Prüffehlergleichungen. Bei diesen wird ein gemessener Wert jeweils als Summe aus wahren Wert und Prüffehler dargestellt. Die Modellgleichung beschreibt den technischen Zusammenhang zwischen den wahren Werten ξ des direkten Verfahrens und den wahren Werten η des indirekten Verfahrens anhand der Kalibrierfunktion $\eta = f(\xi)$ und berücksichtigt dabei auch einen unvermeidbaren, zufälligen Modellfehler ε .

Aus technischen und mathematischen Gründen sollte die Kalibrierfunktion $\eta = f(\xi)$ umkehrbar eindeutig sein, d.h. im praxisrelevanten Messbereich der beiden Verfahren streng monoton verlaufen. Sie sollte möglichst einen glatten Verlauf und geringe Krümmung aufweisen sowie durch eine numerisch leicht auswertbare elementare Funktion darstellbar sein. Dazu eignen sich insbesondere folgende Funktionstypen:

(L) Linearer Ansatz $\eta = \alpha + \beta\xi + \varepsilon$

(P) Proportionaler Ansatz $\eta = \delta\xi + \varepsilon$

(Q) Quadratischer Ansatz $\eta = \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \varepsilon$

4 – FV-Modell für eine lineare Kalibrierfunktion

Das FV-Modell speziell für eine Kalibriergerade $\eta = \alpha + \beta\xi$ enthält insgesamt 7 unbekannte Modellparameter und zwar die beiden Parameter α und β der Modellgeraden, die Prüfstreuungen der beiden Prüfverfahren sowie die Streuung des Modellfehlers ε und außerdem noch Mittelwert und Varianz des direkten Prüfmerkmals. Mit den im Kalibrierversuch ermittelten prüffehlerbehafteten n Messwertpaaren $(x_i; y_i)$, $i=1, \dots, n$, lassen sich jedoch nur fünf Bestimmungsgleichungen für die 7 gesuchten Modellparameter herleiten.

Eine eindeutige Ermittlung der Modellparameter ist daher nur möglich, wenn noch anderweitig zusätzliche Informationen zur Verfügung stehen oder beschafft werden können, wie z.B.

- die Kenntnis der Prüfstreuungen eines der beiden oder beider Prüfverfahren (siehe 4.2),
- die Ermittlung der Prüfstreuungen aus einem kombinierten Kalibrier/Ringversuch (nur möglich, wenn am selben Prüfobjekt zerstörungsfreie Mehrfachmessungen durchführbar sind, vgl. 4.3),
- Wissen über die Größenrelationen der wahren Werte des direkten Verfahrens oder Kenntnisse über Hilfsgrößen, die mit den wahren Werten des direkten Verfahrens linear verknüpft bzw. hoch korreliert sind (vgl. 4.4).

Zu diesen verschiedenen Typen von Zusatzinformationen sind nach Möglichkeit jeweils konkrete technische Fallbeispiele für Prüfverfahrenspaare angegeben.

Die zu den einzelnen Vorinformationen gehörigen Auswertungsschemen sind stets im Text erläutert aber dann noch einmal übersichtlich in einem einheitlichen Auswertungsschema zusammengestellt.

Ein Übersichtsschema erleichtert das Auffinden des richtigen Auswertungsschemas und des zugehörigen Texts.

5 – FV-Modell für einen Proportionalen Ansatz

Geht die Kalibriergerade aus technischen Gründen durch den Ursprung oder durch einen anderen „Zwangspunkt“, so ist nur ein Parameter, die Steigung, zu schätzen. Diese lässt sich hier ohne Zusatzinformationen aus den Daten eines Kalibrierversuches ermitteln, wenn man darauf verzichtet, die vom Modellfehler und vom Prüffehler herrührenden Streuungen getrennt zu ermitteln.

6 – FV-Modell für ein Kalibrierpolynom

Die Bestimmung der Koeffizienten eines Kalibrierpolynoms k -ter Ordnung führt auf ein lineares Gleichungssystem mit $k+1$ Gleichungen für die $k+1$ Koeffizienten des Polynoms. Zur Lösung werden auch hier wieder Zusatzinformationen benötigt. Das System wird beispielhaft für den Fall einer quadratischen Funktion dargelegt unter der Zusatzinformation, dass die Standardabweichung des Prüffehlers für das direkte Verfahren bekannt ist.

TEIL II: Übertragung der Anforderungen vom direkten auf das indirekte Prüfmerkmal und Bestimmung von Prüfplänen für das indirekte Verfahren

7 – Gemeinsame Verteilung von Ergebnispaaren aus direktem und indirektem Prüfmerkmal

Hier wird zunächst erklärt, wie aus der Verteilung des direkten Prüfmerkmals in einer Grundgesamtheit durch die Kalibrierlinie die Verteilung des indirekten Prüfmerkmals „induziert“ wird und wie sich dabei die technischen und statistischen Eigenschaften vom direkten auf das indirekte Merkmal übertragen und zwar unter Berücksichtigung der Prüffehler für beide Merkmale. (7.1)

Die gemeinsame Verteilung von Prüfmerkmalpaaren in der Grundgesamtheit und in Stichproben wird dann durch die zweidimensionale Normalverteilung beschrieben. Deren charakterisierende Parameter und formale Eigenschaften werden größtenteils bildlich veranschaulicht. Dabei ist der für den Zusammenhang zwischen den beiden Prüfmerkmalen wichtigste Parameter der Korrelationskoeffizient ρ . Für ρ werden verschiedene Formeln hergeleitet und auf ihre praktische Relevanz erörtert. Die möglichen Zahlenwerte von ρ werden interpretiert und im Hinblick auf Brauchbarkeit einer Kalibrierlinie für den praktischen Einsatz bewertet.

8 – Schlechtanteile für direktes und indirektes Prüfmerkmal

Anforderungen an Prüfmerkmale werden zumeist in der Form von Grenzwerten oder Grenzquantilen gestellt. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Grenzen für „wahre“ bzw. „gemessene“ Werte. Eine Prüfloseinheit mit Prüfmerkmalwert außerhalb der Grenzen gilt als „nicht konform“ oder als „unzulässig“ kurz als „schlecht“, anderenfalls gilt sie als „gut“. Bei Meßwertpaaren kann jede der beiden Komponenten „gut“ oder „schlecht“ sein, so dass insgesamt vier verschiedene Kombinationen vorkommen können. Jede dieser Kombinationen ist technisch unterschiedlich zu bewerten. (Abschnitt 8.1)

Die Qualität eines Prüfloses ist um so geringer, je höher der Anteil schlechter Einheiten im Prüflos (der sog. „Schlechtanteil“) bei einem oder bei beiden Prüfmerkmalen ist.

Die Schlechtanteile für jedes der beiden Prüfmerkmale sind abhängig von deren jeweiligen Mittelwerten und Varianzen, sowie vom Korrelationskoeffizienten. Die Abhängigkeit lässt sich qualitativ durch je-desto Aussagen beschreiben.

9 – Umrechnung der Quantilenforderung vom direkten auf das indirekte Prüfmerkmal

Ausgangspunkt ist eine Quantilenforderung an das direkte Prüfmerkmal, d.h. eine festgelegte Grenzquantile zusammen mit einem vorgegebenen maximalen Schlechtanteil. Zur Übertragung dieser Forderung auf das indirekte Prüfmerkmal werden zwei plausible Vorschläge gemacht, A und B genannt.

Vorschlag A besteht darin, die Grenzquantile für das indirekte Prüfmerkmal so festzulegen, dass im Grenzfall die maximal zulässigen Schlechtanteile übereinstimmen. Die Grenzquantile für das indirekte Prüfmerkmal wird dann ermittelt, indem man die Grenzquantile für das direkte Verfahren anhand der Kalibrierlinie umrechnet und einen von verschiedenen Modellparametern abhängigen Term hinzufügt.

Vorschlag B besteht darin, die Grenzquantile für wahre und gemessene Werte einander gleich zu setzen und diese gemeinsame Grenzquantile direkt anhand der Kalibrierlinie zur Quantile für das indirekte Prüfmerkmal umzurechnen. Allerdings unterscheiden sich dann die maximal zulässigen Schlechtanteile der beiden Prüfmerkmale.

Da sowohl bei Vorschlag A als auch bei B die Schlechtanteile bei beiden Prüfverfahren nur punktuell aber nicht generell übereinstimmen, wird jeweils die Funktion hergeleitet, welche die Schlechtanteile der beiden Verfahren miteinander verknüpft, (vgl. 9.2 und 9.3).

In allen Umrechnungsformeln tritt ein unbekannter Faktor F auf. Zu dessen numerischer Bestimmung gibt es verschiedene Wege, je nachdem, welche der verschiedenen möglichen Darstellungsformen man verwendet (vgl. 9.5).

Abschnitt 9 beinhaltet die Lösung zu Aufgabe 2 des Forschungsvorhabens.

10 – Bestimmung eines Prüfplans für das indirekte Prüfverfahren

Die Einhaltung einer spezifizierten Quantilenforderung an das direkte Prüfmerkmal x wird überprüft, bzw. die Verletzung der Anforderung wird nachgewiesen anhand eines Prüfplans für Variablenprüfung.

Der Prüfplan ist durch Vorgabe des Probenumfanges n_x und des sog. Annahmefaktors k_x bestimmt. Mit diesen beiden Prüfplanparametern wird die Entscheidungsregel formuliert:

Ein Prüflos wird angenommen bei vorgegebener

- Mindestquantile Q_{Min} , falls $\bar{x} - k \cdot s \geq Q_{\text{Min}}$,
- Höchstquantile Q_{Max} , falls $\bar{x} + k \cdot s \leq Q_{\text{Max}}$,

wobei \bar{x} der arithmetische Mittelwert und s die Standardabweichung der ermittelten Prüfergebnisse ist.

Bei Anwendung der Entscheidungsregel können zwei Arten von Fehlentscheidungen auftreten: Ein akzeptables Prüflos wird zurückgewiesen bzw. ein nicht akzeptables Prüflos wird nicht abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Fehlentscheidungen sind ablesbar an der sog. „Annahmekennlinie“ oder „Operations-Charakteristik“ (kurz: OC). Diese Funktion beschreibt quantitativ die „Filterfähigkeit“ des Prüfplanes beim Ausfiltern nicht akzeptabler Prüflose.

Nach der in 9 dargelegten Übertragung der Anforderungen vom direkten auf das indirekte Prüfmerkmal sind die Prüfplanparameter n_y und k_y des Prüfplans für das indirekte Prüfmerkmal

„geeignet“ zu bestimmen, d.h. so zu bestimmen, dass die Filterleistungen der beiden Prüfpläne einander entsprechen. Völlige Äquivalenz ist nicht erreichbar. Daher werden zwei verschiedene Wege zur Lösung vorgeschlagen, „Möglichkeit 1“ und „Möglichkeit 2“ genannt. Jede der beiden Möglichkeiten kann mit jedem der beiden Vorschläge A und B aus Abschnitt 9 kombiniert werden, so dass insgesamt vier verschiedene Lösungsvarianten zur Lösung der beiden Aufgaben 2 und 3 zur Verfügung stehen.

Um die Filterleistung der Prüfpläne für das direkte und das indirekte Prüfmerkmal miteinander vergleichen zu können, werden die Operationscharakteristiken beider Prüfpläne in Abhängigkeit vom Schlechtanteil für das direkte Prüfmerkmal dargestellt.

Möglichkeit 1 besteht darin, die Prüfplanparameter der beiden Prüfpläne einander gleich zu setzen, also $k_y = k_x$ und $n_y = n_x$

Möglichkeit 2 besteht darin, dass man für die funktional einander zugeordneten Schlechtanteile der beiden Prüfmerkmale (vgl. 9) gleiche Annahmewahrscheinlichkeiten fordert.

Die Formeln zur Bestimmung der Prüfplanparameter k_y und n_y aus k_x und n_x sowie aus dem Faktor F (siehe 9.5) werden hergeleitet.

Für alle vier Lösungsvarianten werden die zugehörigen OC-Formeln hergeleitet.

Abschnitt 10 beinhaltet die Lösung zu Aufgabe 3 des Forschungsvorhabens.

Anhang: Statistische Begriffe

Im Anhang werden einige wichtige statistische Grundbegriffe anschaulich erläutert. □